Mérnöki modellalkotás
Az elmélettől a gyakorlatig

Prefix fák tömörítése:
a dinamikus programozás

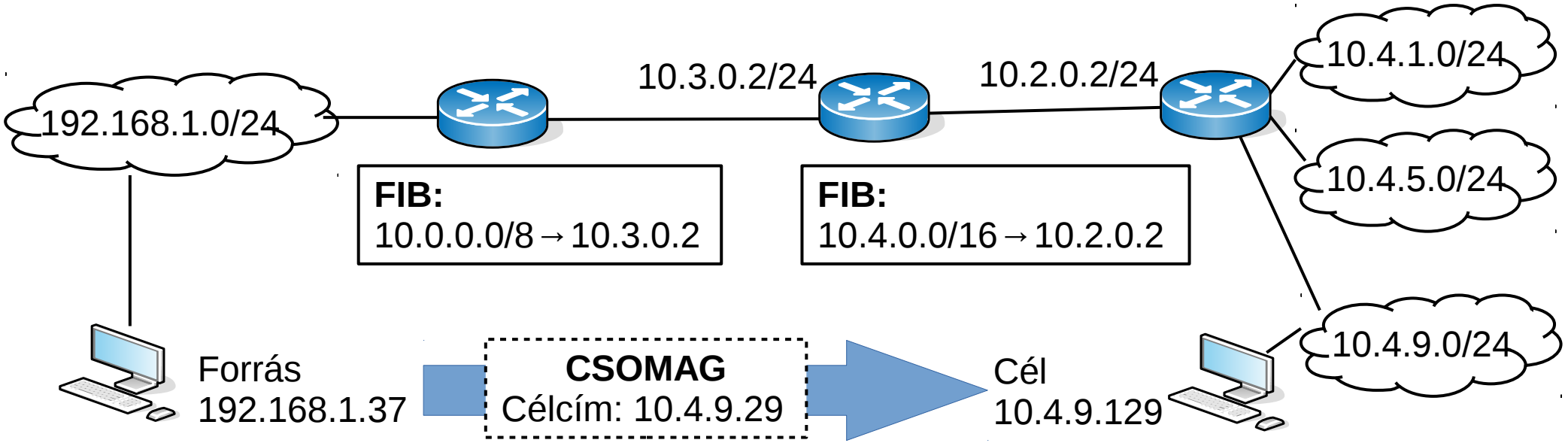
Tartalom

- Ismétlés:
  - IP forgalomtovábbítás és LPM
  - prefix fák és fabejárások
  - normalizálás: a minimális prefix-mentes forma
- FIB aggregáció:
  - FIBek leírása minimális számú prefixszel
  - Szint-tömörítés

Ismétlés

IPv4 forgalomtovábbítás

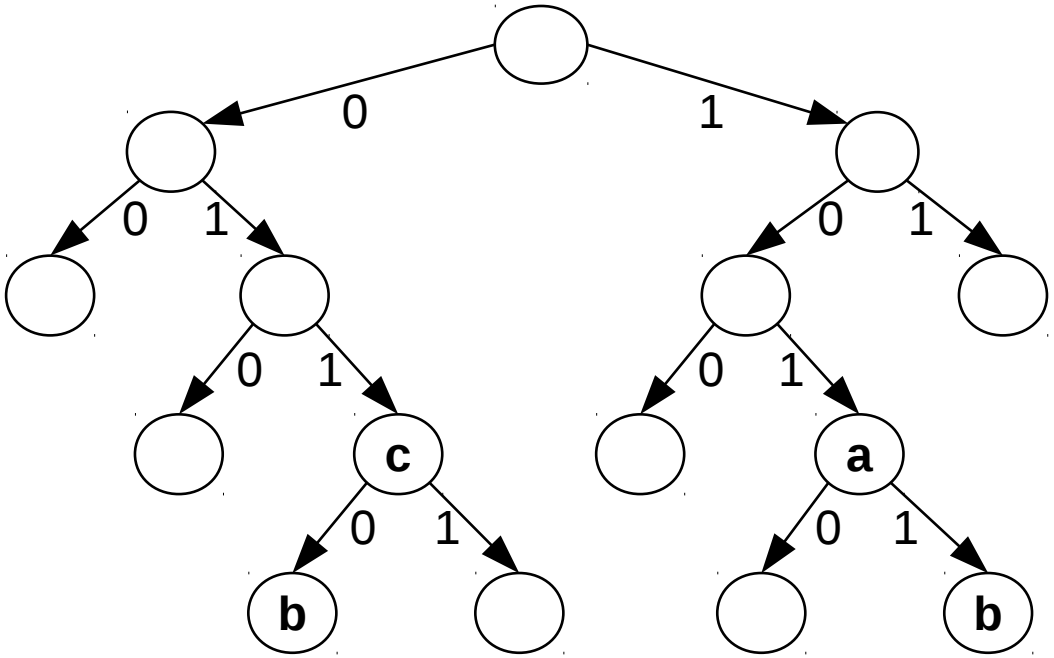
- Minden csomag tartalmazza a cél IP címét
- Keresés a forgalomtovábbítási táblában (FIB)
- Eredmény: az útvonalon következő router (next-hop) IP címe



A legspecifikusabb prefix

- **Longest Prefix Match (LPM):** ha egy IP címre több bejegyzés illeszkedik, akkor a legtöbb biten illeszkedő prefix preferált
- Táblázat: LPM komplexitása *O(n), n* bejegyzésre
- **Bináris prefix fa:** *O(log n)* futási időben LPM

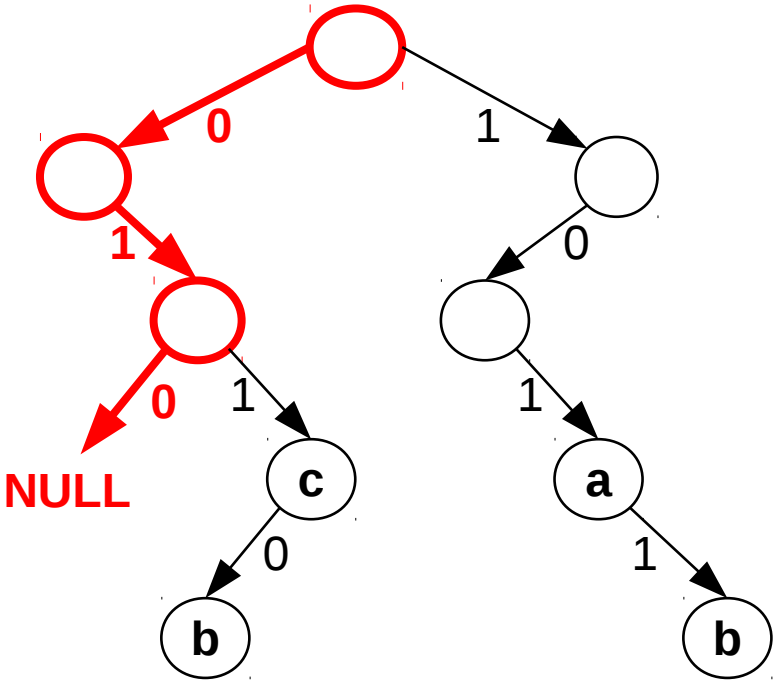
IP prefix	Prefix	NH
160.0.0.0/3	101	a
96.0.0.0/4	0110	b
96.0.0.0/3	011	c
176.0.0.0/4	1011	b



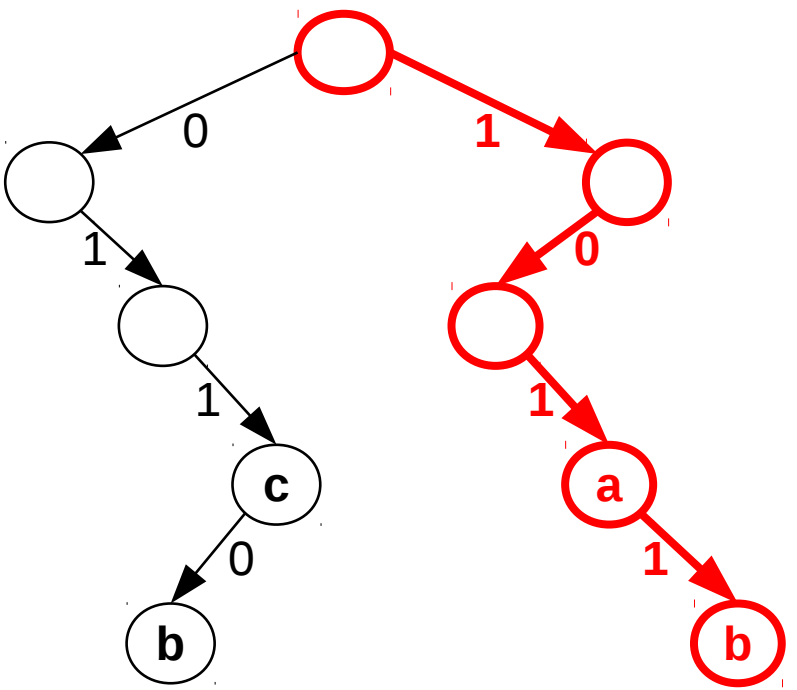
A prefix fa: keresés

- A keresett IP cím következő bitjének megfelelően a `0` vagy `1` élcímkéjű élen lépünk tovább
- Tároljuk a legutoljára olvasott címkét

`LPM(69.12.75.54) = LPM(01000...) → NULL`



`LPM(178.4.66.19) = LPM(1011...) → b`



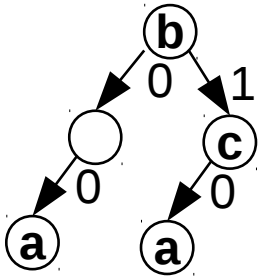
Prefix fák ekvivalenciája

- FIBek leírása nem egyedi: **FIB aggregáció**

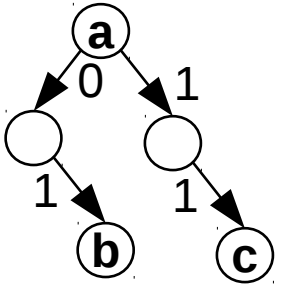
IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	b
128.0.0.0/1	1	c
0.0.0.0/2	00	a
128.0.0.0/2	10	a

≡

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	a
64.0.0.0/1	01	b
192.0.0.0/2	11	c



≡



- Két FIB ekvivalens, ha minden 32 bites α IPv4 címre az LPM eredménye megegyezik

$$FIB_1 \equiv FIB_2, \text{ ha } \forall\alpha: LPM(FIB_1, \alpha) = LPM(FIB_2, \alpha)$$

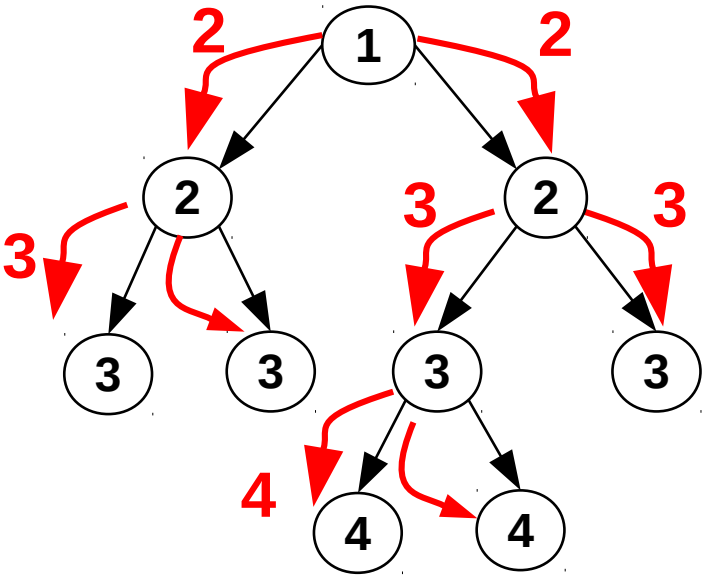
Fabejárások: preorder

- *preorder(F, f, i):* alkalmazzuk *f*-et *F* gyökerére majd a bal és jobb oldali részfákra rekurzívan

```
preorder(F, f, i):
    x ← f(F, i)
    preorder(left(F), f, x)
    preorder(right(F), f, x)
```

- Írjuk be minden pontba a gyökértől vett távolságot: *preorder(F, f, 1)*

```
f(F, i):
    label(F) ← i
    return (i+1)
```



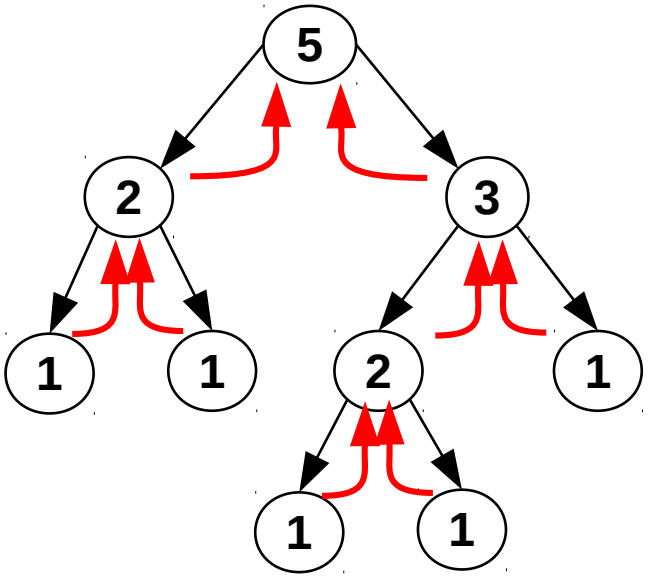
Fabejárások: postorder

- *postorder(F, f): f* függvényt előbb alkalmazzuk a részfákon rekurzívan és csak ezután a gyökéren

```
postorder(F, f):
    postorder(left(F), f)
    postorder(right(F), f)
    return f(F)
```

- Írjuk be minden pontba a részfa **leveleinek** számát

```
f(F):
  if (F leaf): label(F)←1
  else:
    label(F)←label(left(F)) +
                label(right(F))
```



Egy hasznos fa-transzformáció

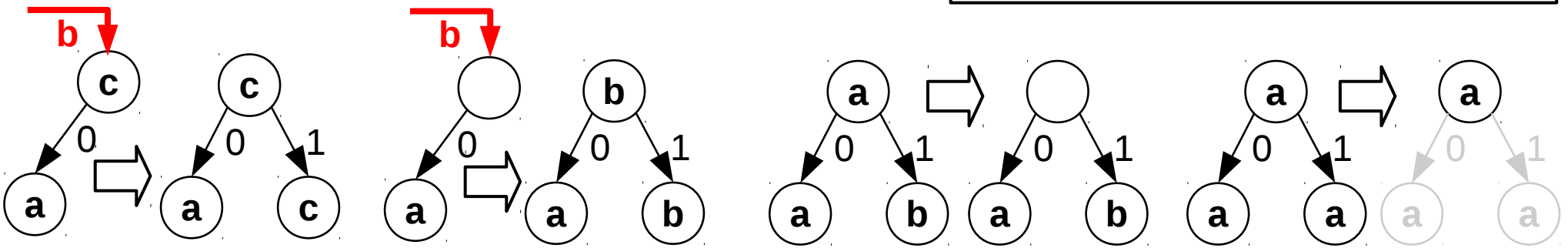
- FIB ekvivalens transzformációja egyedi alakba
- Egymás utáni preorder és postorder bejárással

1. preorder(F, f, d_0)

```
f(F, i):
  if F is interior:
    if ∄ left(F):  add_node(left(F))
    if ∄ right(F): add_node(right(F))
  if (label(F) == ∅):
    label(F) ← i
  return  label(F)
```

2. postorder(F, g)

```
g(F, i):
  if F is leaf: return
  if label(left(F)) ==
    label(right(F)) ==
    label(F):
      remove_node(left(F))
      remove_node(right(F))
      return
  label(F) = ∅
```



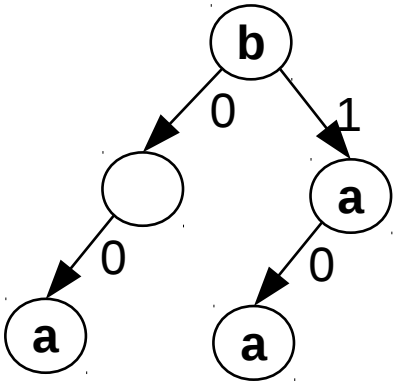
Normalizálás

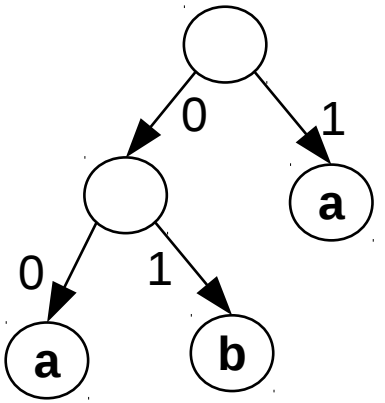
- d_0: az első preorder-t kezdeti címkével indítjuk
- Ez kerül a címkézetlen pontokra: **default gateway!**

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	b
128.0.0.0/1	1	a
0.0.0.0/2	00	a
128.0.0.0/2	10	a

normalizálás

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/2	00	a
64.0.0.0/2	01	b
128.0.0.0/1	1	a

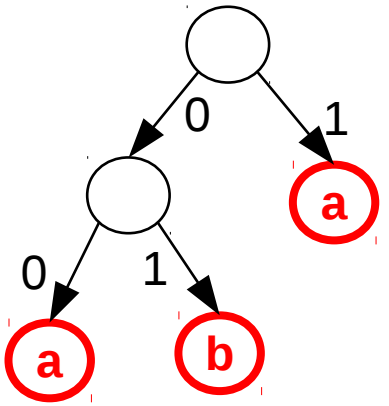




Normalizálás: tulajdonságok

- A normalizált FIB táblázatos formában **prefix-mentes**: egyik bináris kulcs sem prefixe a másiknak
- Nincsenek kevésbé specifikus bejegyzések!

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/2	00	a
64.0.0.0/2	01	b
128.0.0.0/1	1	a



- A prefix fa **levél-címkézett** (címke csak levélen) és **szabályos** (nincs benne „NULL pointer”)
- A továbbiakban a normalizált alakot használjuk

FIB aggregáció:

FIB leírása a minimális számú prefixszel

FIB aggregáció

- Egy IP router minden továbbítandó csomagra LPM keresést végez
- Kb. 500 bejegyzésesen több millió LPM/sec
- A routerek kezdenek kifogyni a memóriából, ahogy az Internet növekszik
- **FIB aggregáció:** FIB ekvivalens transzformációja memóriatakarékos formába
- Régebbi routerek is használhatók maradnak
- Befér a FIB „gyors” memóriába (cache)

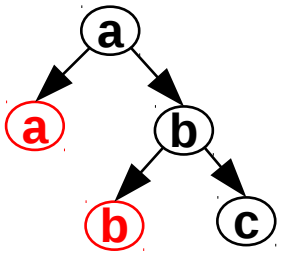
FIB „optimális” tömörítése

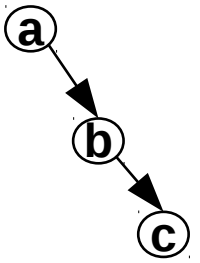
- Láthattuk, hogy egy FIB leírása nem egyedi
- Egyes bejegyzések feleslegesek lehetnek

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	a
0.0.0.0/1	**0**	**a**
128.0.0.0/1	1	b
128.0.0.0/2	**10**	**b**
192.0.0.0/2	11	c

ORTC

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	a
128.0.0.0/1	1	b
192.0.0.0/2	11	c





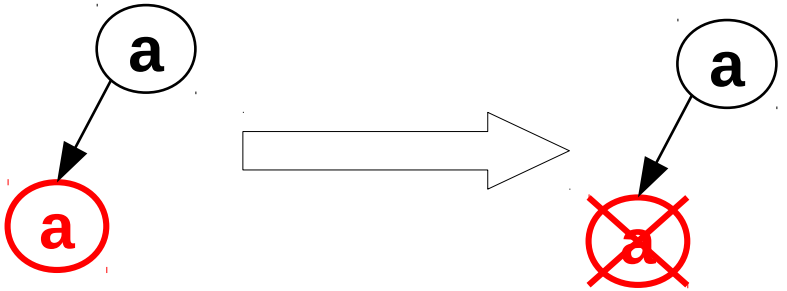
- **ORTC** (Optimal Routing Table Compression): bejegyzések számának minimalizálása FIBben

ORTC: alapgondolat

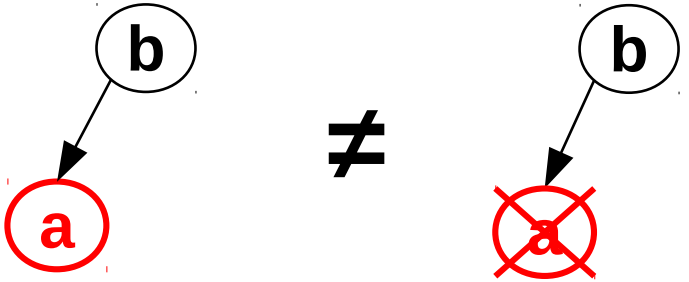
- Bejegyzések száma a FIBben = a prefix fában levő címkézett pontok száma
- Az ORTC célja olyan prefix fa előállítása, amelyben a lehető legkevesebb címke van
- **Ötlet:** ha egy pont a szülőjétől a címkéjével azonos címkét „örököl”, akkor nem kell bele címkét írnunk
- Mivel az LPM eredménye a bejárás során utoljára látott címke, jó címkére „emlékszünk”
- Helyes választással megspórolható egy címke!

ORTC: alapgondolat

- Elhagyható a bejegyzés például egy levélben, ha a szülőtől azonos címkét „örököl”



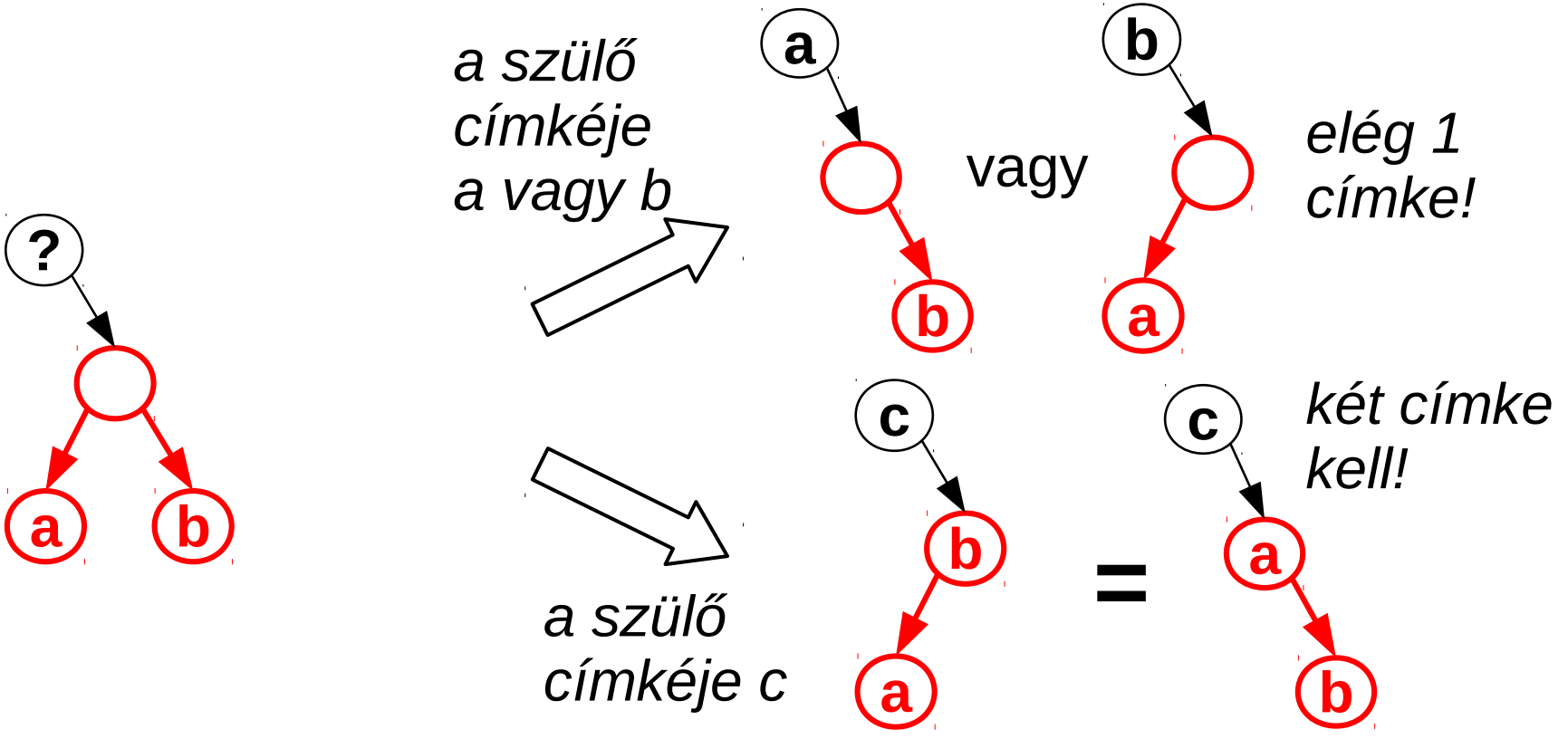
- Ha azonban a szülő más címkét tartalmaz, akkor ki kell írnunk a levélbe a címkéjét



- Különben hibás csomagtovábbítás (`a` helyett `b`)

ORTC: alapgondolat

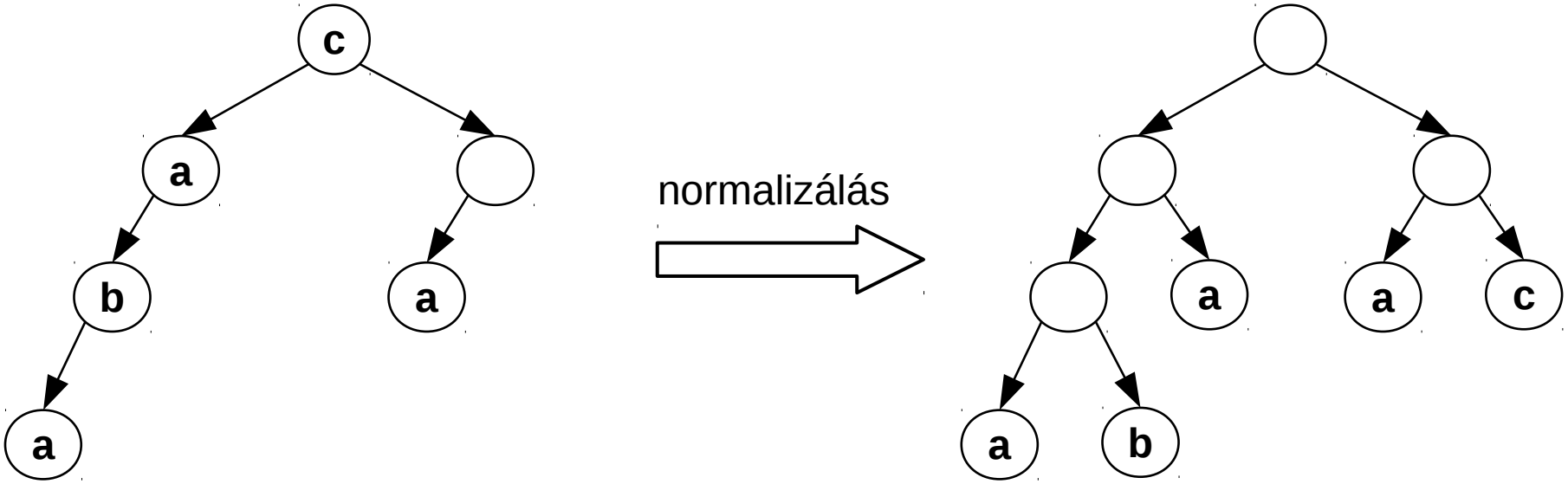
- Hasonlóan teljes részfákra: elhagyható a címke ha a szülőtől megfelelő címkét „örököl”
- Ha azonban a szülő más címkét választ, akkor ki kell írnunk a pontba a címkéjét!



ORTC

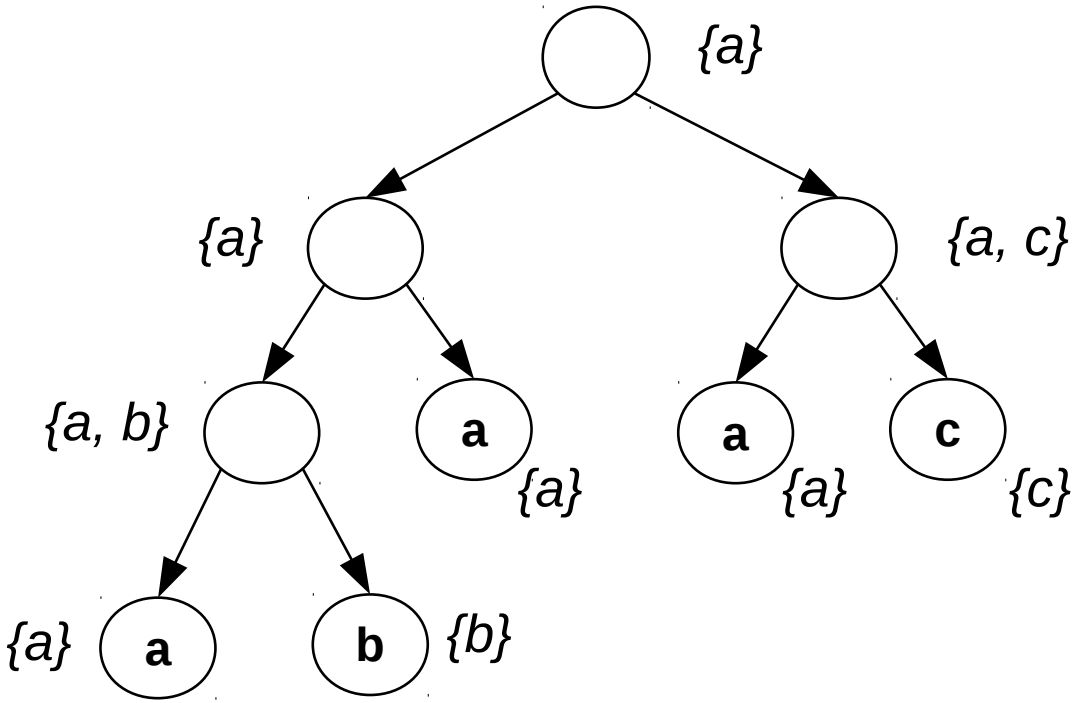
- Induljunk a FIB normalizált alakjából

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	c
0.0.0.0/1	0	a
0.0.0.0/2	00	b
128.0.0.0/2	10	a
0.0.0.0/3	000	a



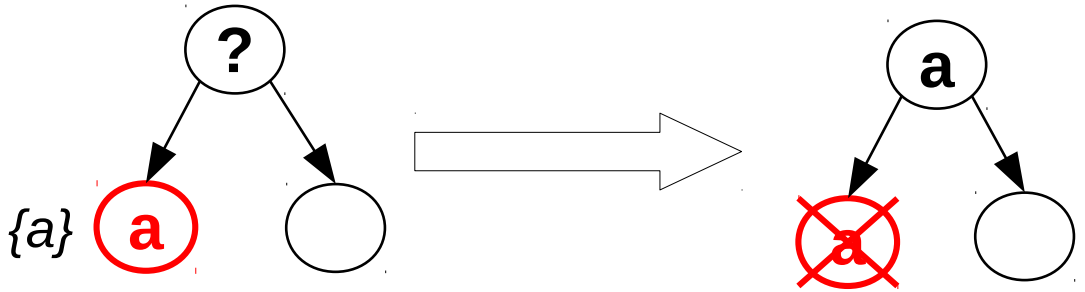
ORTC

- Jelölje D_F az F (rész)fa számára „preferált” címkék halmazát
- Ha F valamely D_F-beli címkét örököl a szülőtől, akkor F gyökérpontjába nem kell címkét írnunk



Preferált címkék: levélpontok

- Ha F levélpont, akkor $D_F = \{ label(F) \}$



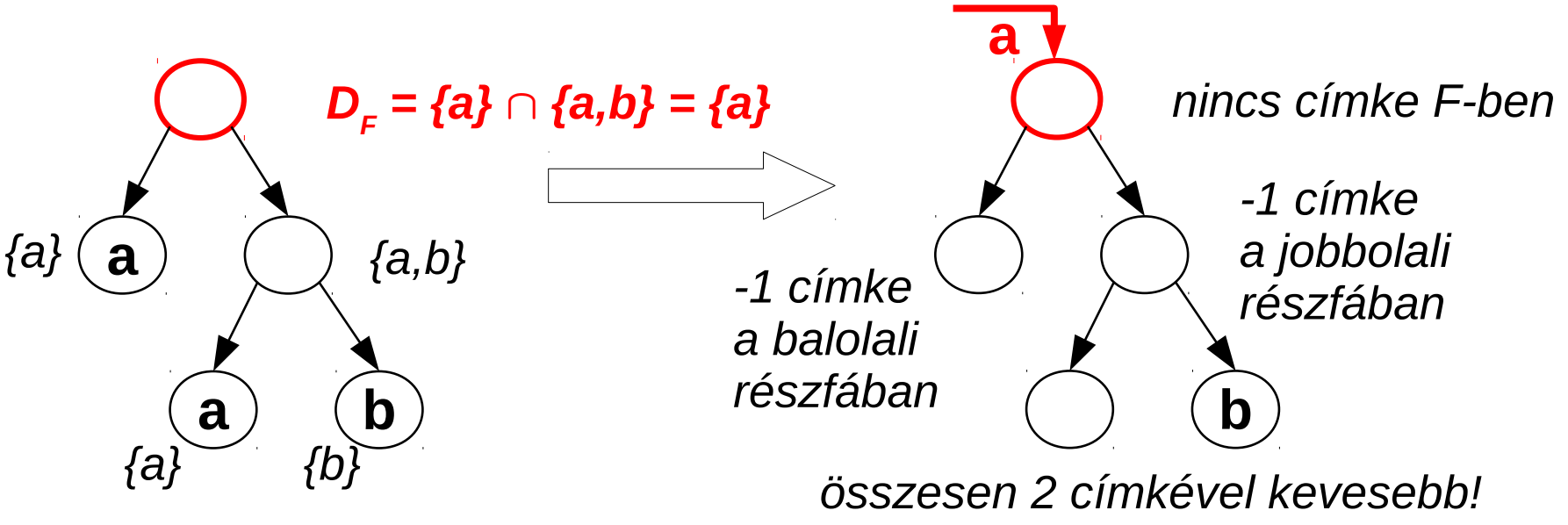
- Emlékeztető: a levélpontban mindig van címke, mert a normalizált alakból indultunk
- Hasonlóan: belső pontoknak mindig lesz két gyermeke a normalizálás miatt

Preferált címkék: belső pontok

- Ha F teljes részfa (gyökere belső pont), akkor:

1)Ha a gyermekeihez tartozó $D_{left(F)}$ illetve $D_{right(F)}$ halmazban van azonos címke, akkor ezt írva *F*-be a két részfában spórolunk egy-egy címkét

ha $D_{left(F)} \cap D_{right(F)} \neq \emptyset$, akkor $D_F = D_{left(F)} \cap D_{right(F)}$



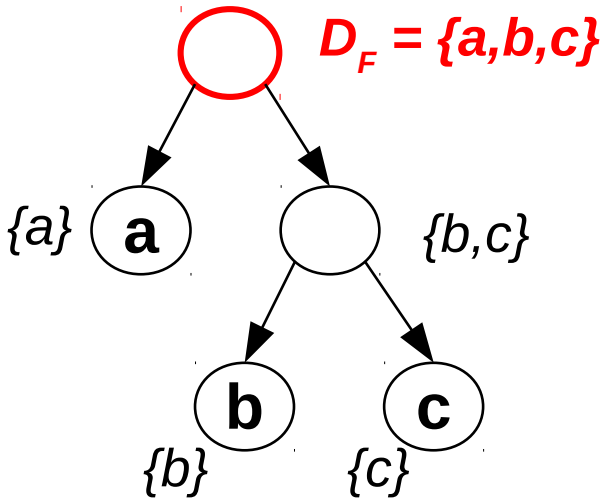
Preferált címkék: belső pontok

2)Ha azonban a $D_{left(F)}$ és $D_{right(F)}$ halmazokban nincs közös címke

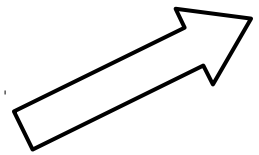
- Ha *F* pont $D_{left(F)}$-beli címkét örököl a szülőjétől, akkor a jobboldali részfában lesz egy címkével kevesebb de a baloldaliban nem
- Ha $D_{right(F)}$-beli címkét örököl, vice versa
- Ha egyiket sem, akkor nem tudunk spórolni
- Tehát F-ben $D_{left(F)}$ és $D_{right(F)}$ uniója preferált

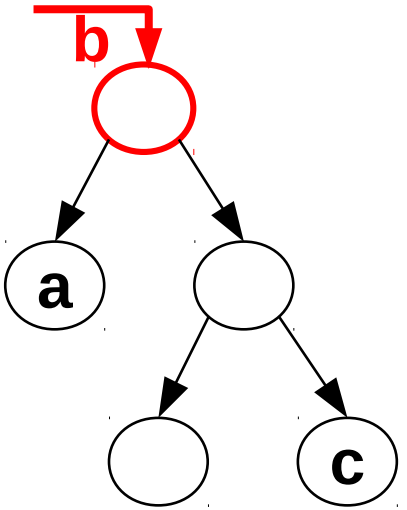
ha $D_{left(F)} \cap D_{right(F)} = \emptyset$, akkor $D_F = D_{left(F)} \cup D_{right(F)}$

Preferált címkék: belső pontok



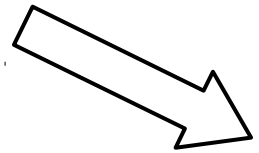
D_F-beli címkét örökölve, például b-t

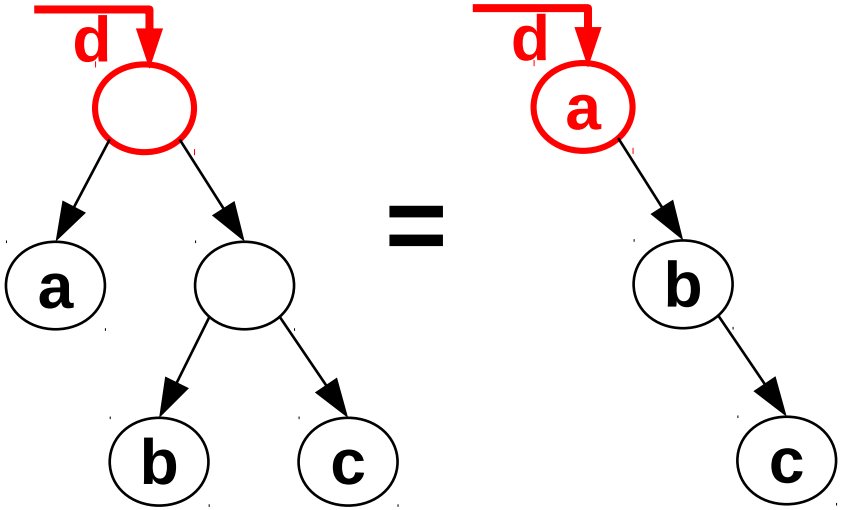




ha jó címkét kapunk, -1 címke

nem D_F-beli címkét örökölve, például d-t





ha nem jó címkét kapunk, nem tudunk spórolni

ORTC algoritmus

- Input: normalizált prefix fa

1) Postorder bejárással **előállítjuk az egyes részfákra az D_F halmazokat**

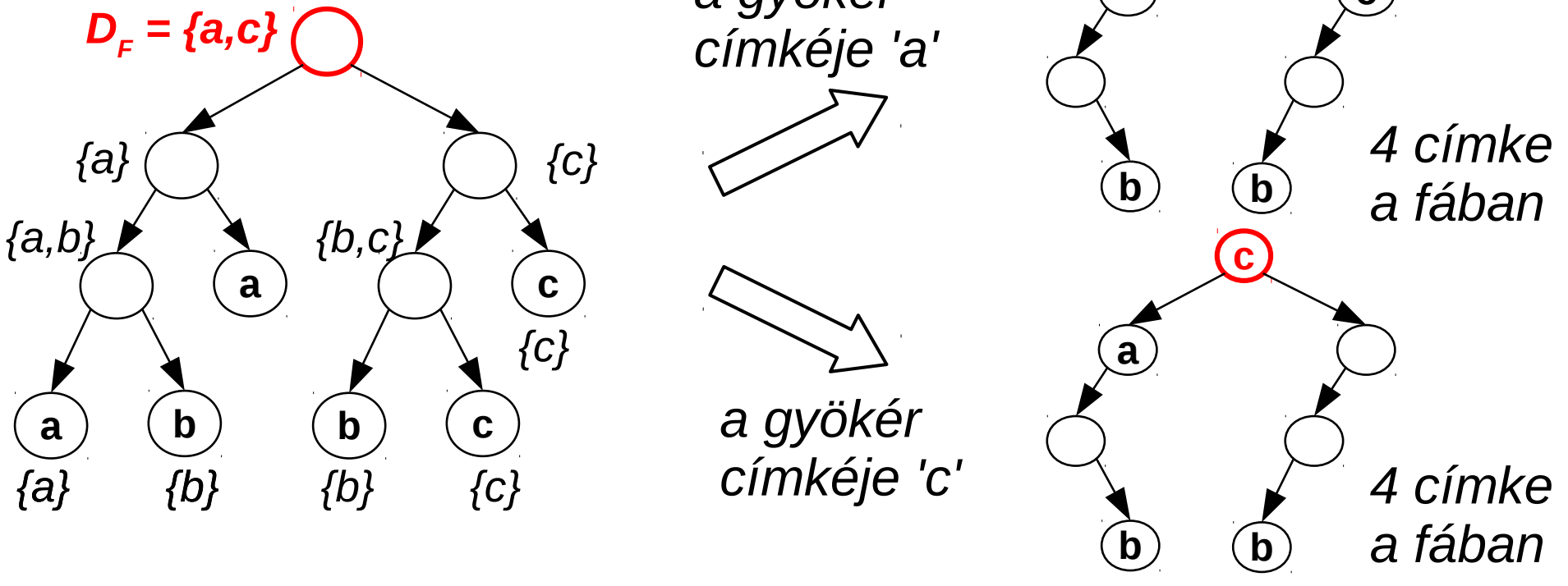
postorder(F, f)

```
f(F):
  if F is leaf: D_F ← label(F)
  else:
    if D_left(F) ∩ D_right(F) ≠ ∅: D_F ← D_left(F) ∩ D_right(F)
    else: D_F ← D_left(F) ∪ D_right(F)
```

ORTC algoritmus

2)Megkeressük az optimális címkét a gyökérben

- bármely $d_0 \in D$ címkét választhatjuk, azonos számú címke lesz a kapott fában



ORTC algoritmus

3)Preorder bejárással **előállítjuk az optimális prefix fát**

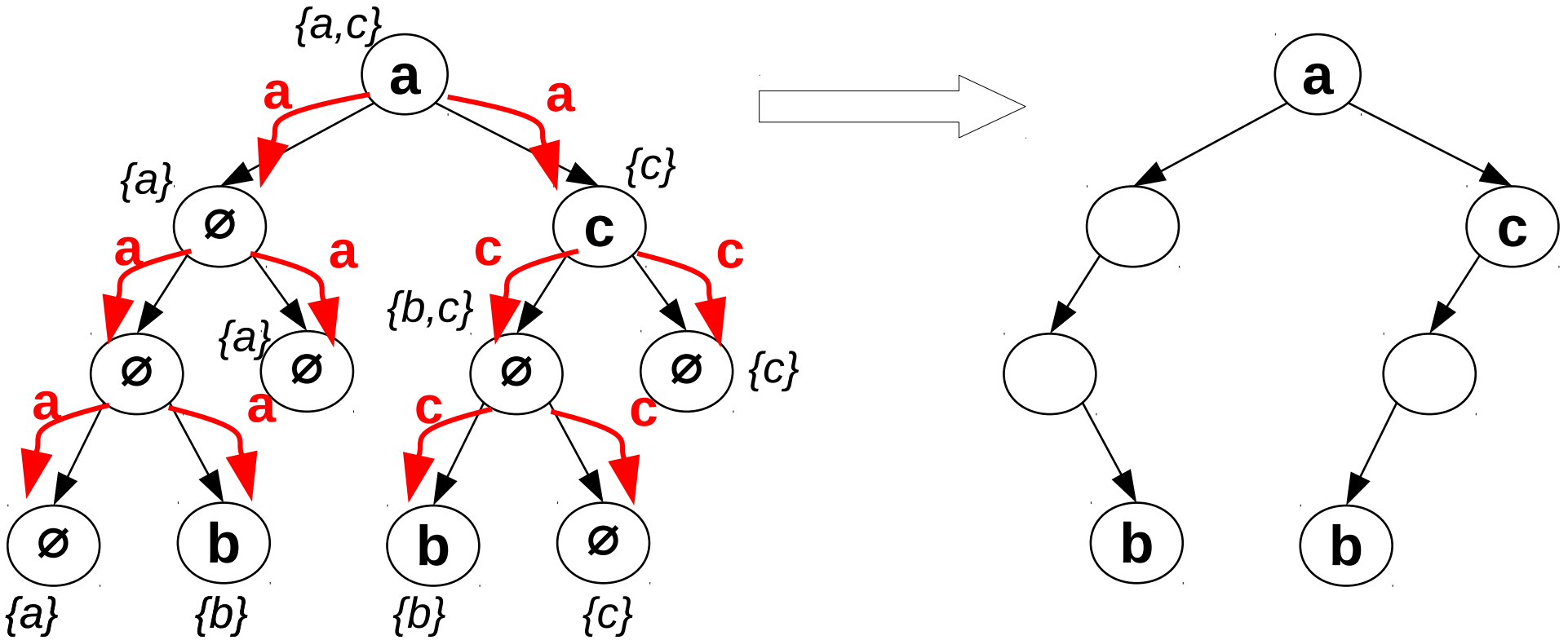
- A gyökérbe kiírjuk az imént talált d_0 címkét

  preorder(F, g, d_0), kezdeti érték: d_0

```
f(F, d):
    if d ∈ D_F:                 // a szülő jó címkét választ
        label(F) ← ∅            // üres címke
        return d
    else:                       // a szülő „rossz” címkén
        label(F) ← choose any d ∈ D_F
        return label(F)
```

ORTC algoritmus

- A végén az üres leveleket eltávolíthatjuk

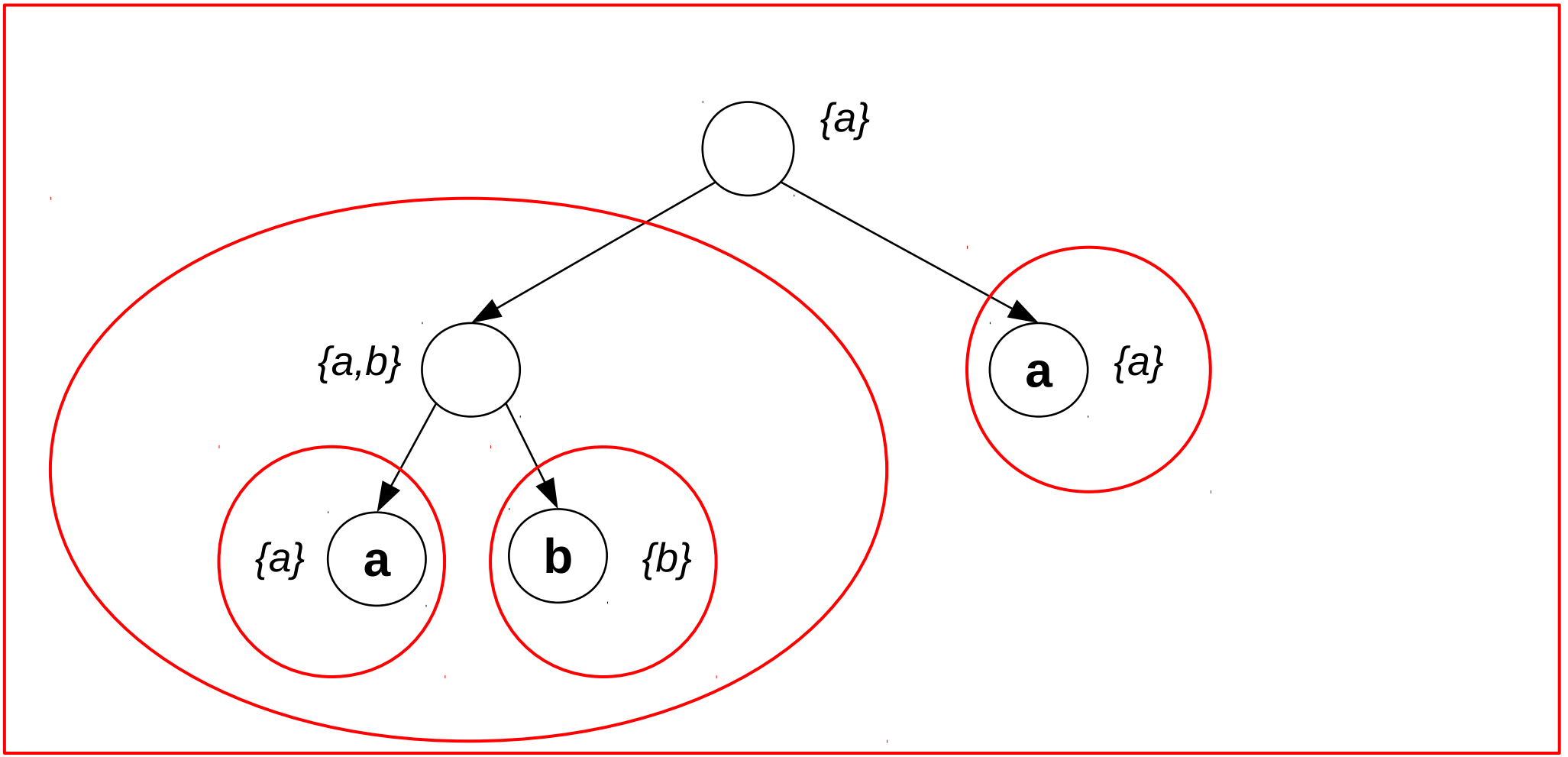


Dinamikus programozás

- Az ORTC algoritmus klasszikus stratégiát követ:
  - a problémát felosztjuk egymásba ágyazódó részproblémákra
  - a „legszűkebb” részproblémától indulva rekurzívan felírjuk a megoldást
- Most az „egymásba ágyazódó részproblémákat” a részfák definiálják
- A „legszűkebb” részprobléma az egyszerű levél
- Egy belső pontot mindig az alatta levő részfák megoldása ismeretében oldunk meg

Dinamikus programozás

- Ez az általános problémamegoldási stratégia a dinamikus programozás („*divide and conquer*”)



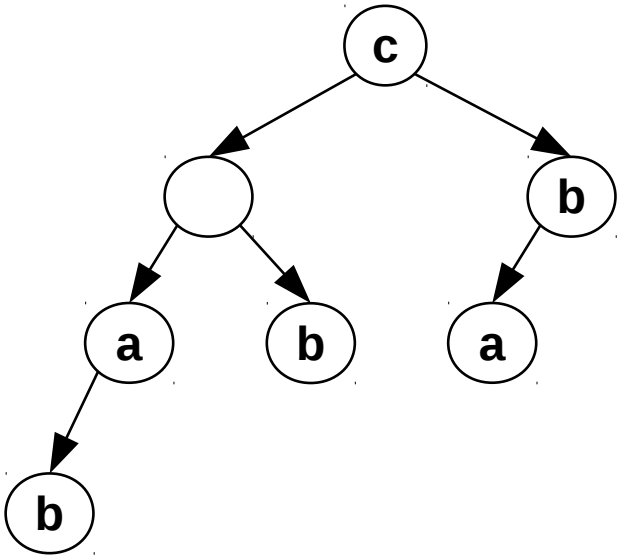
Dinamikus programozás

- Az ORTC algoritmus ekvivalensen felírható **dinamikus program** formájában is
- A „művészet” a részproblémák definiálása
  - fákon végzett optimalizálás esetén triviális
  - általános esetben a probléma struktúrájából
- Hatékony általános optimizálási stratégia!

ORTC: példa

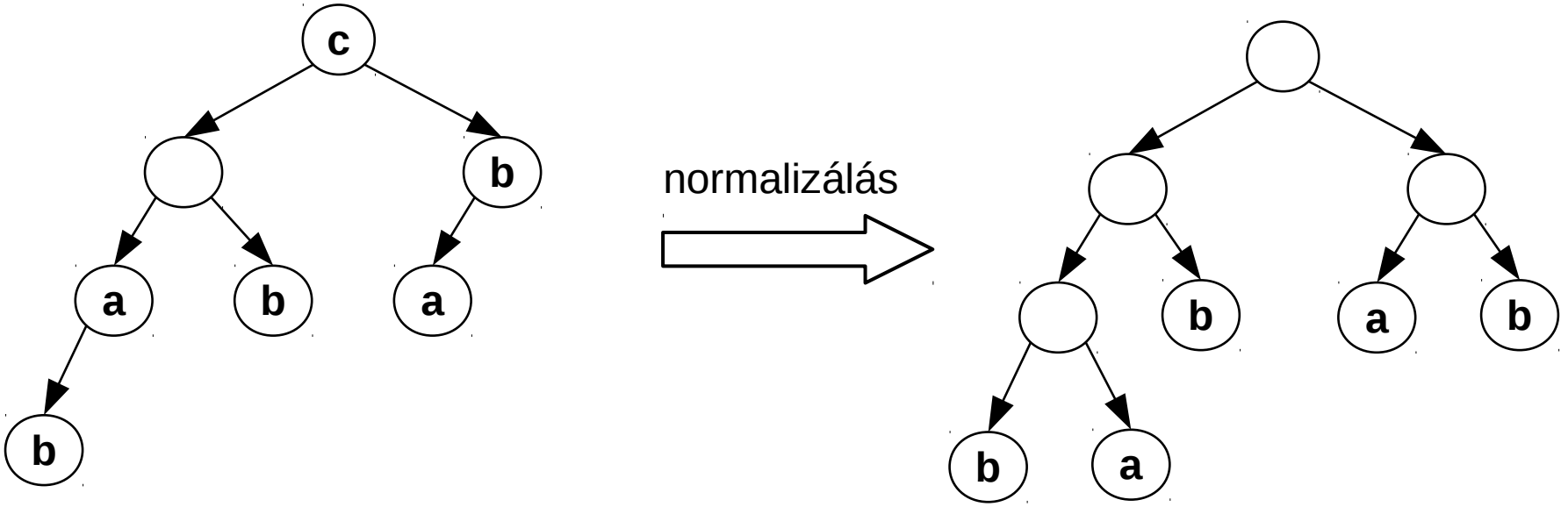
1)Prefix fa felírása

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	c
128.0.0.0/1	1	b
0.0.0.0/2	00	a
64.0.0.0/2	01	b
128.0.0.0/2	10	a
0.0.0.0/3	000	b



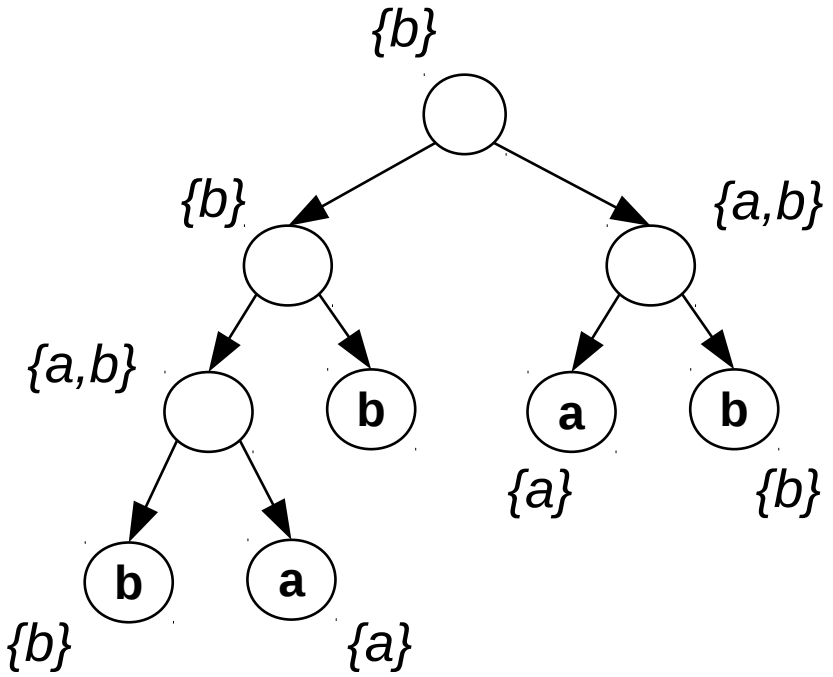
ORTC: példa

2)Normalizálás



ORTC: példa

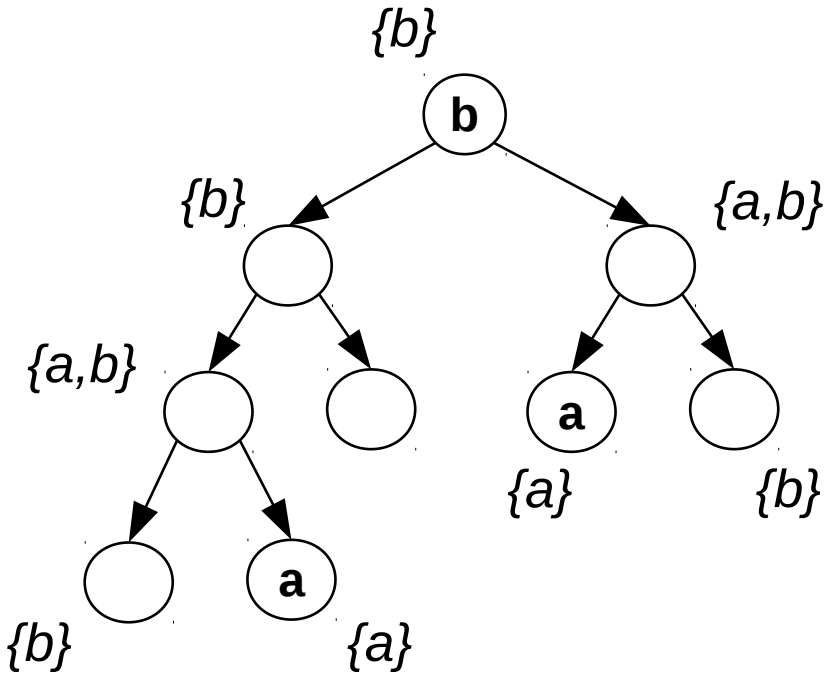
3)Preferált címkék keresése



ORTC: példa

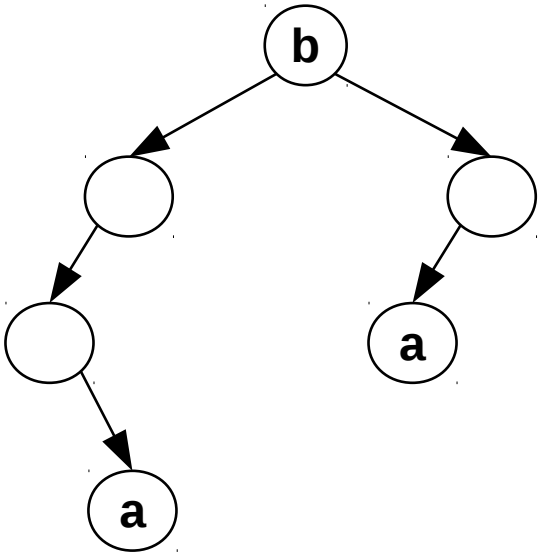
4)Gyökérpont címkéjének megválasztása

5)Módosított prefix fa felírása



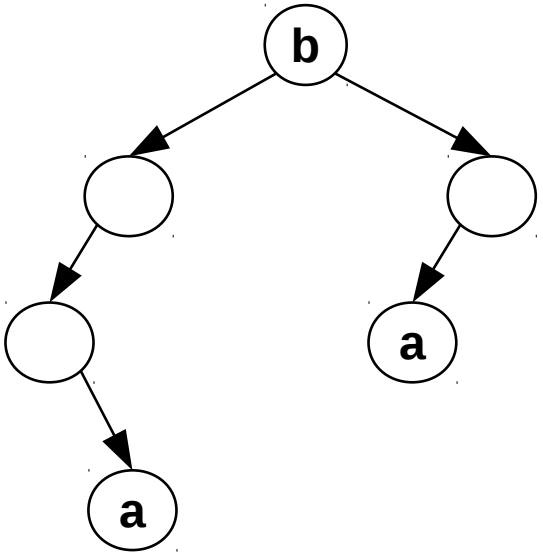
ORTC: példa

6)Üres levélpontok eltávolítása



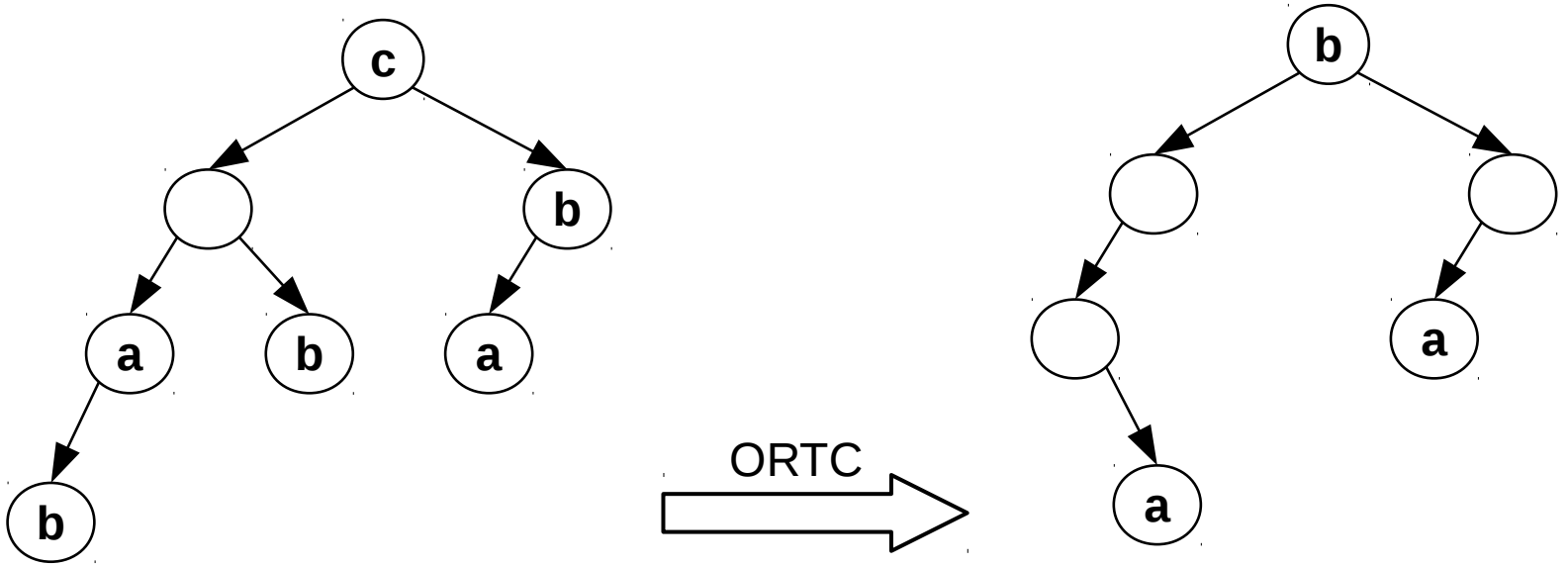
ORTC: példa

7)FIB felírása (6 bejegyzés helyett elég 3, ráadásul a c next-hop címke teljesen eltűnik)



IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	b
128.0.0.0/2	10	a
32.0.0.0/3	001	a

ORTC: példa



IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	c
128.0.0.0/1	1	b
0.0.0.0/2	00	a
64.0.0.0/2	01	b
128.0.0.0/2	10	a
0.0.0.0/3	000	b

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/0	-	b
128.0.0.0/2	10	a
32.0.0.0/3	001	a

ORTC: összefoglaló

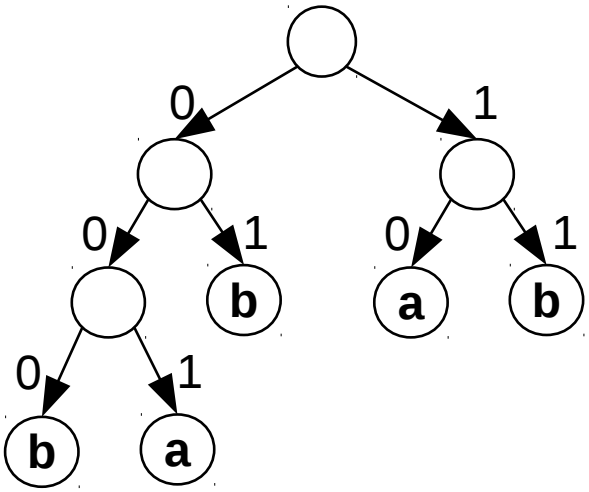
- Általában 30–40%-kal kisebb prefix fa
- A FIB táblázatos formája még kisebb lehet: TCAM-ek használatakor kulcsfontosságú!
- A módosított FIB teljesen ekvivalens az eredetivel (minden csomagot pont ugyanarra a next-hopra küld) és az LPM keresés is azonos
- ORTC futási idő: 3 fabejárás (optimalizálható kettőre) – lineáris idejű algoritmus
- De frissítés/módosítás nehéz – újra kell építeni az egész fát: *O(N)* az optimális *O(*log *N)* helyett

FIB aggregáció:

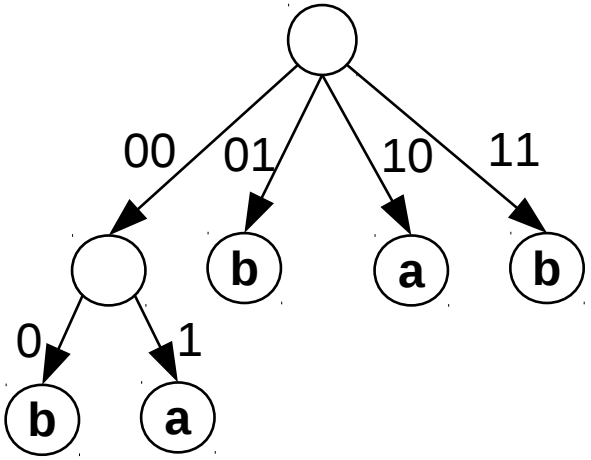
Prefix fák szinttömörítése

Szinttömörített prefix fák

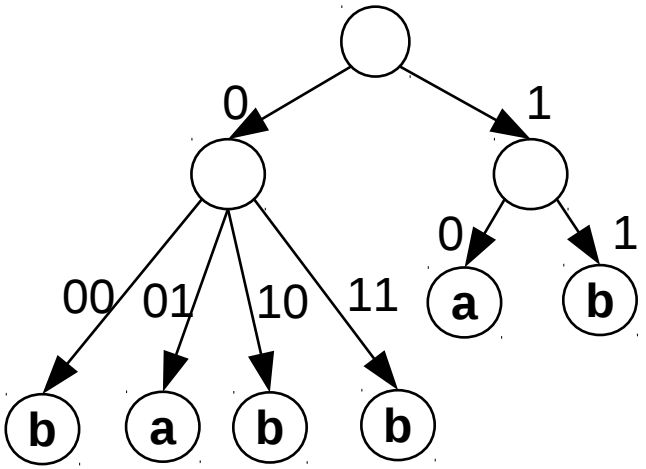
- Eddig bináris prefix fákkal dolgoztunk: minden belső pontnak 2 gyermeke van a fában
- **Szinttömörített fa:** minden belső pontnak 2^k gyermeke van valamely $k > 0$ egész számra



Bináris prefix fa
(normalizált)



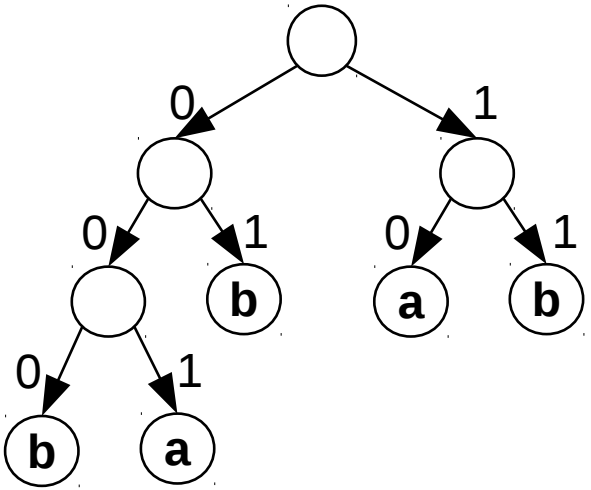
Szinttömötített prefix fa
(normalizált)



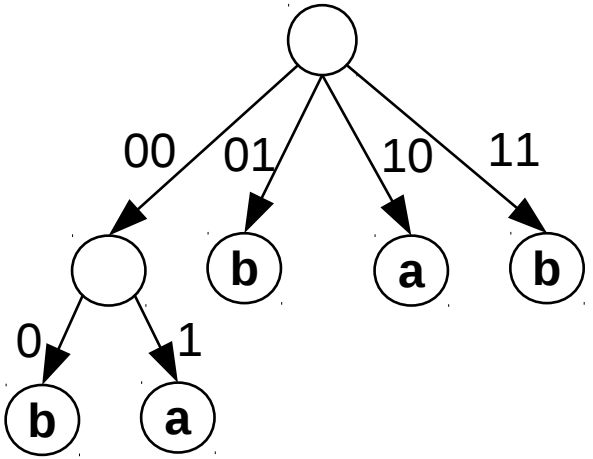
Alternatív
szinttömötített prefix fa
(normalizált)

Szinttömörített prefix fák

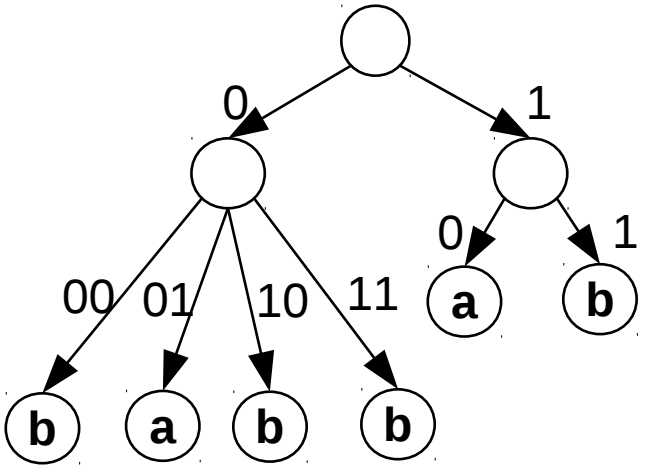
- LPM alapvetően ugyanaz, mint a bináris fán, de ha egy pontnak 2^k gyermeke van, akkor egyszerre k bitet olvasunk a kulcsból (IP cím)
- $2=2^1$ gyermek esetén 1 bitet, $4=2^2$ esetén kettőt



Bináris prefix fa
(normalizált)



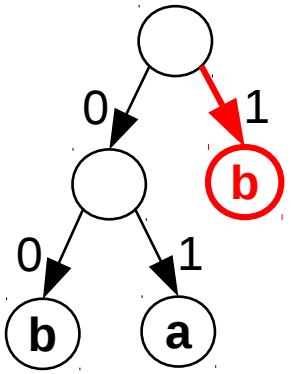
Szinttömötített prefix fa
(normalizált)

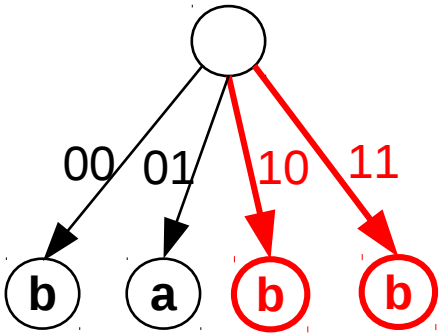


Alternatív
szinttömötített prefix fa
(normalizált)

Prefix kiterjesztése

- Szinttömörítés: teljes mélységű fákat állítunk elő





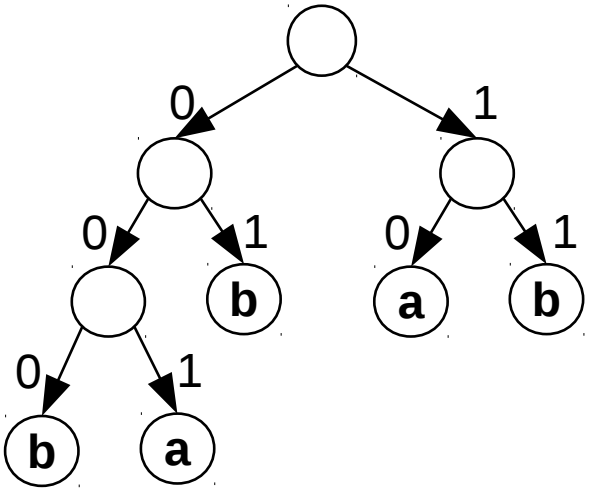
- Ekvivalens azzal, mintha a `128.0.0.0/1` prefixet de-aggregáltuk volna a FIBben

IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/2	00	b
64.0.0.0/2	01	a
128.0.0.0/1	**1**	**b**

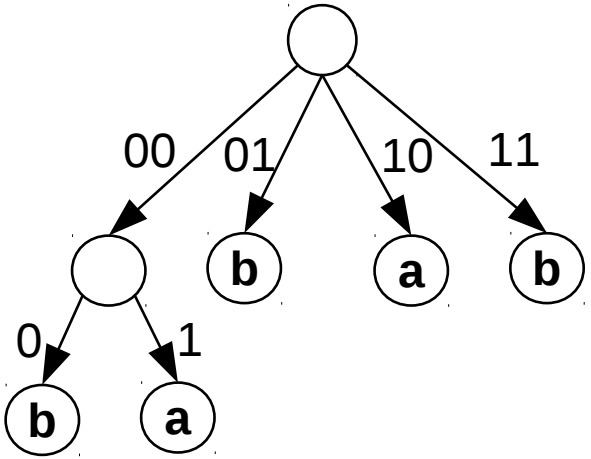
IP prefix	Prefix	Címke
0.0.0.0/2	00	b
64.0.0.0/2	01	a
128.0.0.0/2	**10**	**b**
192.0.0.0/2	**11**	**b**

Szinttömörített prefix fák

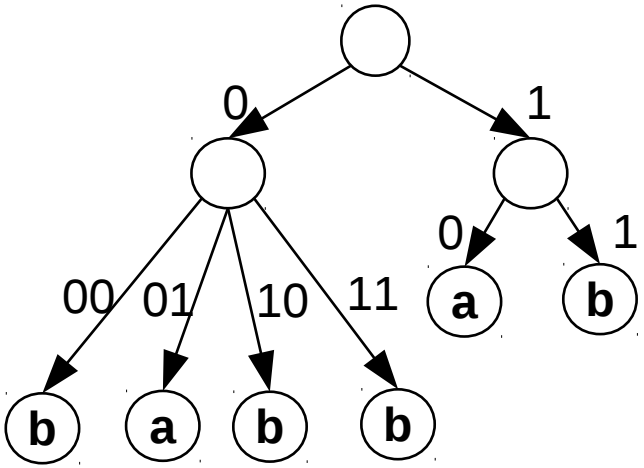
- **Előny:** kevesebb pointer = kisebb tárolási méret + gyorsabb LPM (kevesebb szintet kell bejárni)
- **Hátrány:** a pontokban tárolni kell a gyermekek 2^k számát, pontosabban k-t (ez az ún. *stride*)



Bináris prefix fa
(normalizált)



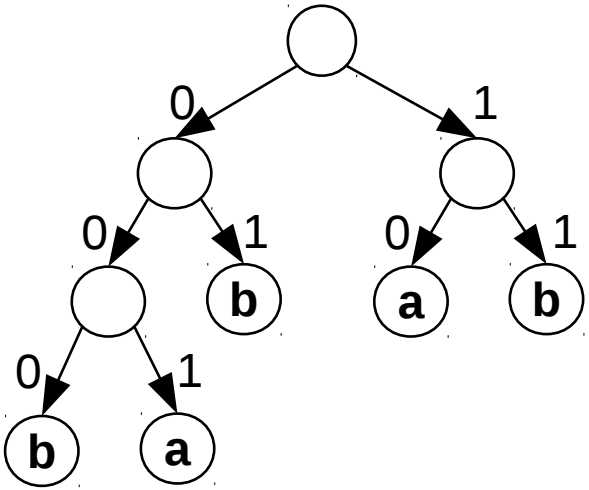
Szinttömötített prefix fa
(normalizált)



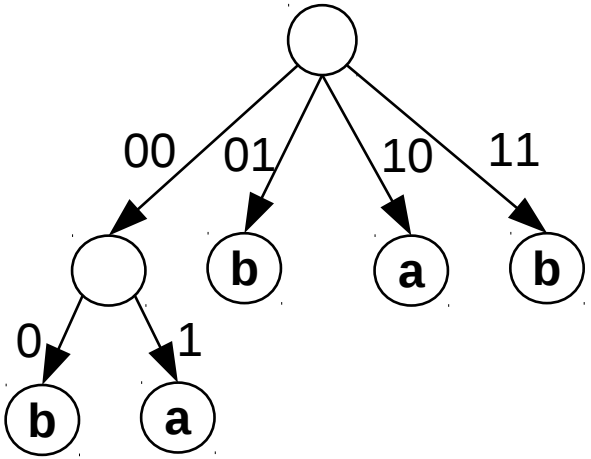
Alternatív
szinttömötített prefix fa
(normalizált)

Optimális szinttömörítés

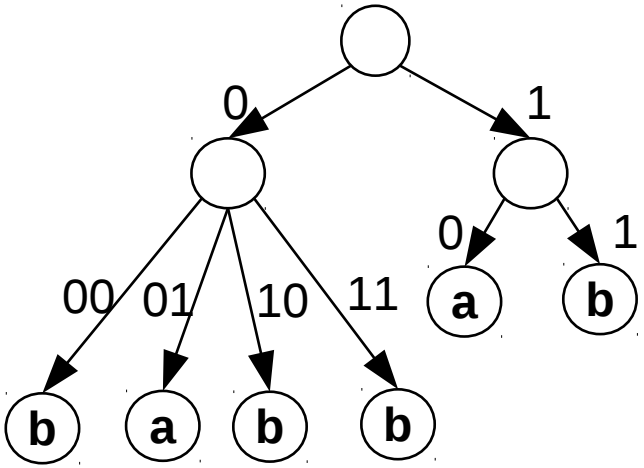
- Nem mindegy, hogy a fa egyes pontjait mekkora *stride*-ra írjuk ki → **optimalizálás**
- Az alábbi példán az első szinttömörített fában csak 6 pointer van, a másodikban 8



Bináris prefix fa
(normalizált)



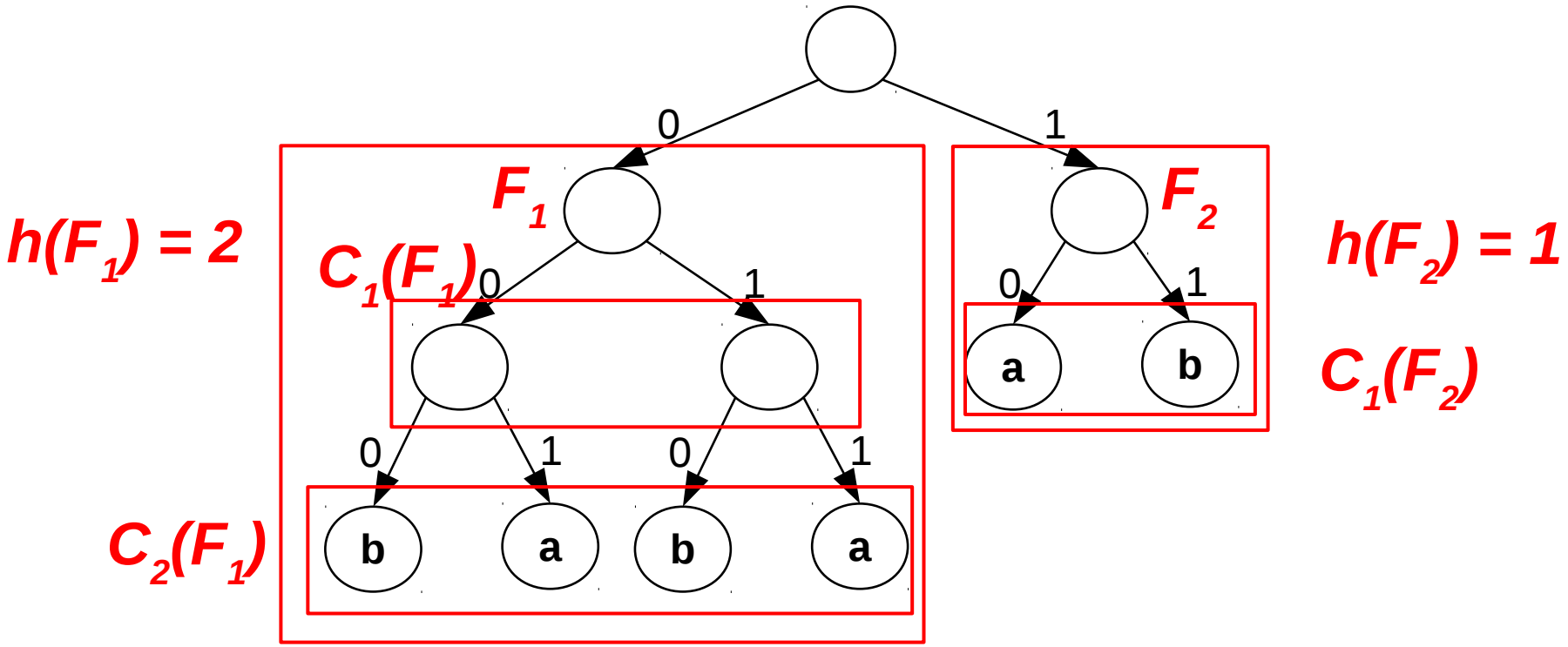
Szinttömötített prefix fa
(normalizált)



Alternatív
szinttömötített prefix fa
(normalizált)

Optimális szinttömörítés

- Induljunk ki a normalizált bináris prefix fából
- Legyen *h(F)* egy *F* részfa **mélysége** és legyen $C_i(F)$ az *F* részfában az **i-*edik* szinten levő gyermekek halmaza** (a gyökértől számítva)



Optimális szinttömörítés

- Jelölje $n_k(F)$ az F részfában levő pointerek számát abban az esetben, ha F gyökerében a gyermekek száma pont 2^k (*stride=k*)
- Tegyük fel, hogy valahogy már meghatároztuk F összes részfájára az optimális *stride* méretet és a hozzá tartozó optimális $n(F)$ faméretet
- Levélpontokra könnyű: levélpont alatti részfa mindig üres (nincs benne pointer), így:

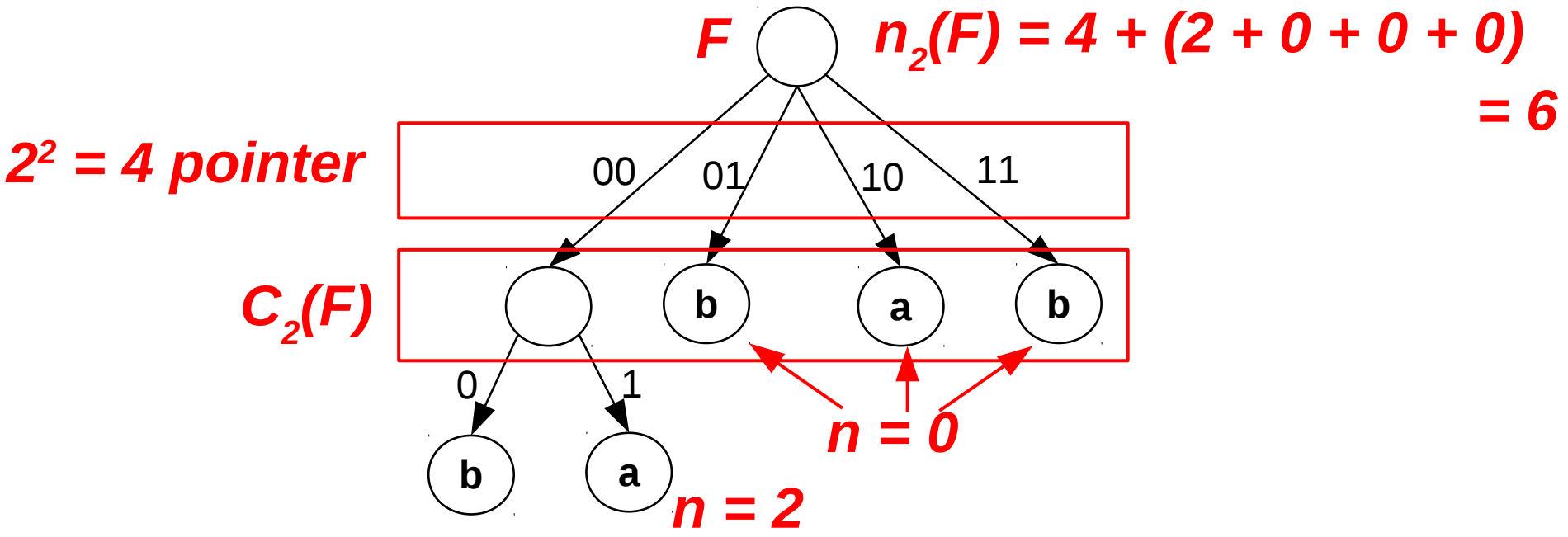
$$n(F) = 0 \quad \text{ha } F \text{ levélpont}$$

Optimális szinttömörítés

- **Ötlet:** ha egy F részfát *k stride*-ra írunk ki, akkor a benne levő poiterek száma

$$n_k(F) = 2^k + \sum_{G \in C_k(F)} n(G)$$

- Például az alábbi *F* fa *2*-es *stride*-on: *6* pointer



Optimális szinttömörítés

- Természetesen minden pontra érdemes a legkisebb fát eredményező *stride*-ot választani

$$n(F) = \min_{k=1..h(F)} n_k(F) = \min_{k=1..h(F)} \left(2^k + \sum_{G \in C_k(F)} n(G)\right)$$

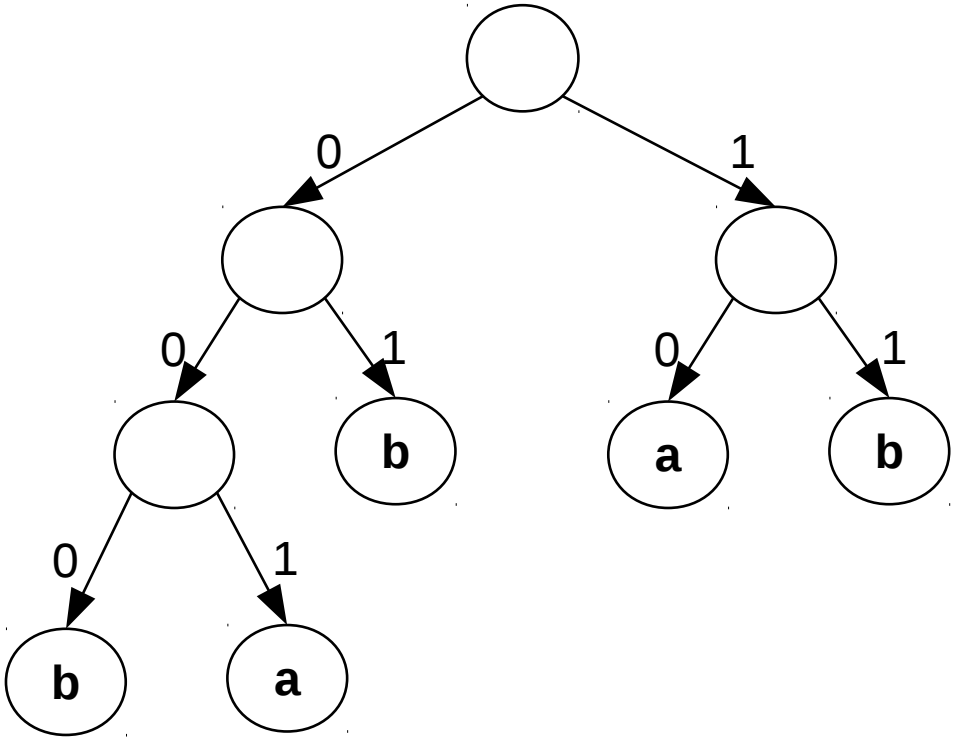
- **Algoritmus:** postorder sorrendben minden F részfára kiszámítjuk az optimális *n(F)* értéket
- **Dinamikus program:** a részproblémák ismét a részfák, önmagukban optimálisan megoldhatók!

$$n(F) = \min_{k=1..h(F)} \left(2^k + \sum_{G \in C_k(F)} n(G)\right) \qquad \forall F \text{ belső pont}$$

$$n(F) = 0 \qquad \forall F \text{ levélpont}$$

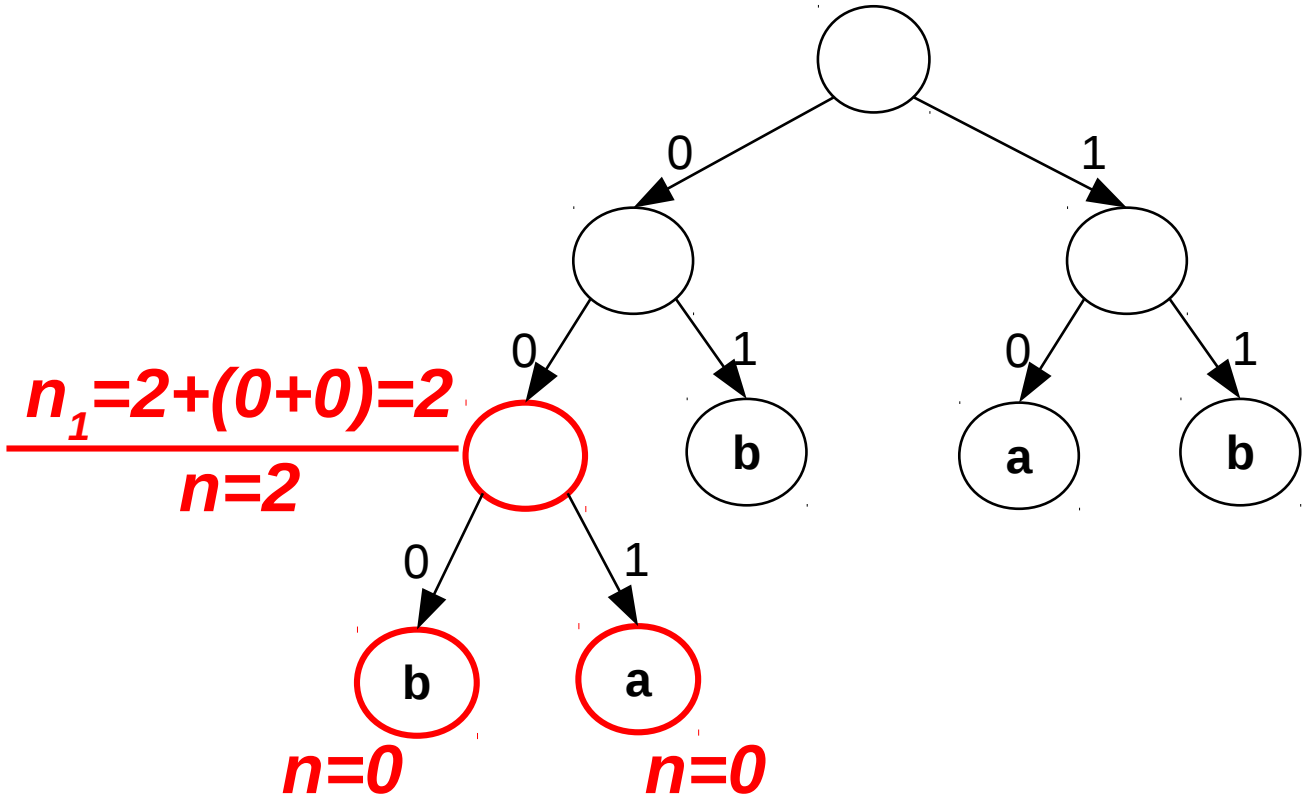
Optimális szinttömörítés: példa

1)Induljunk a normalizált bináris prefix fából



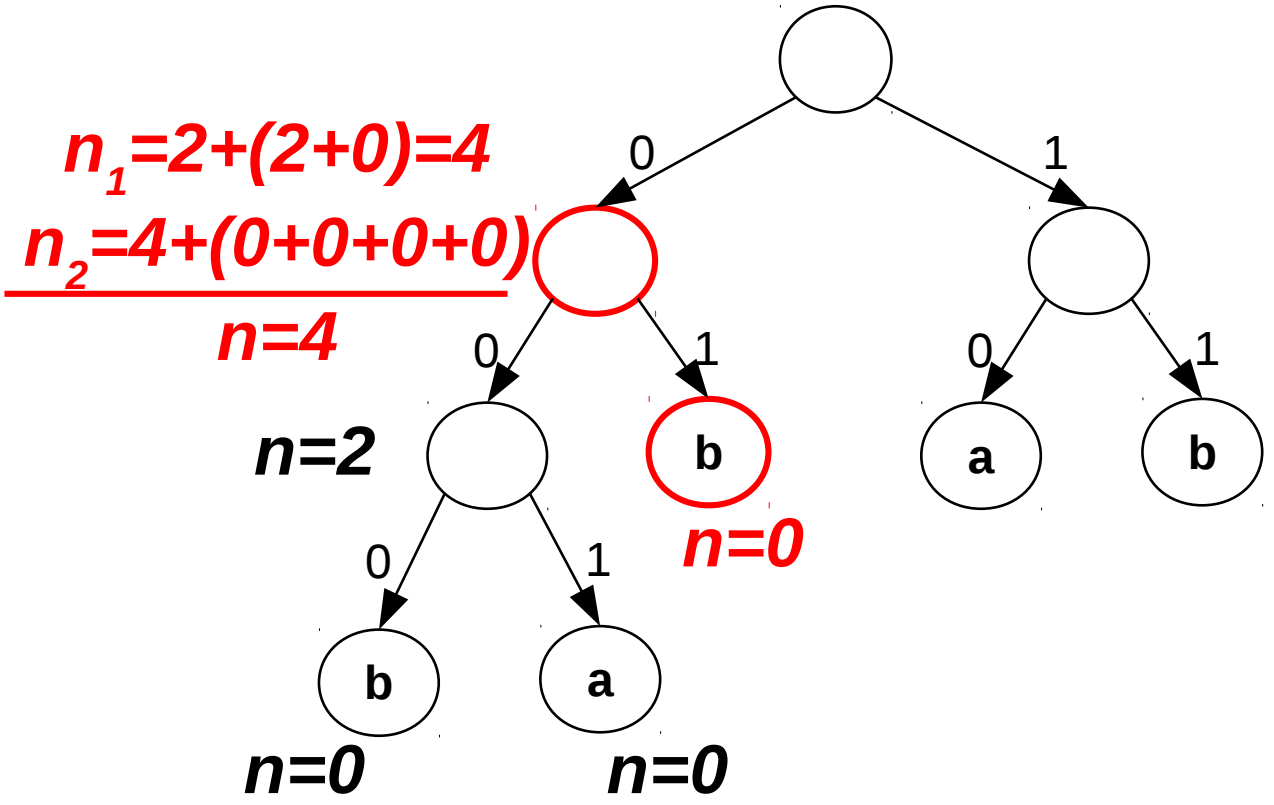
Optimális szinttömörítés: példa

2)Minden F részfára határozzuk meg az $n_k(F)$ és $n(F)$ értékeket postorder sorrendben



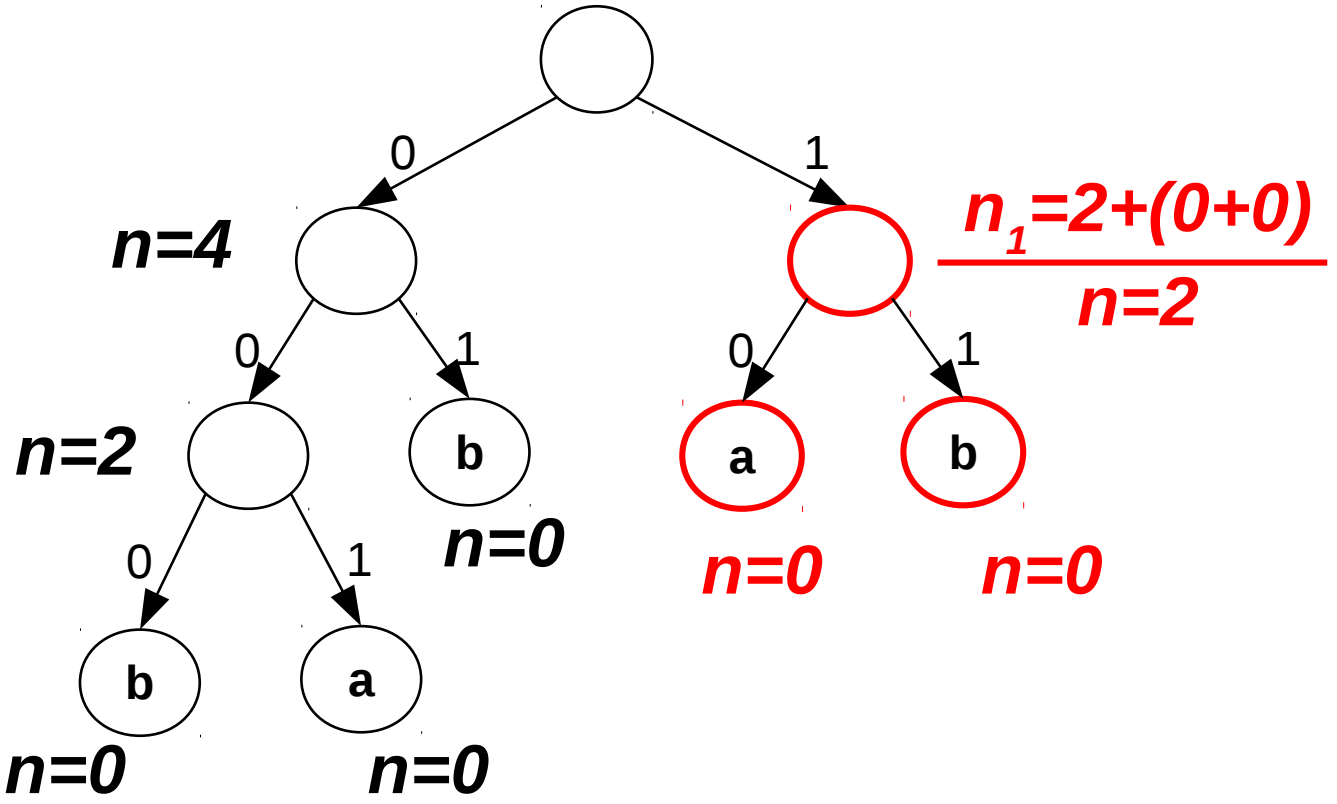
Optimális szinttömörítés: példa

2)Minden F részfára határozzuk meg az $n_k(F)$ és $n(F)$ értékeket postorder sorrendben



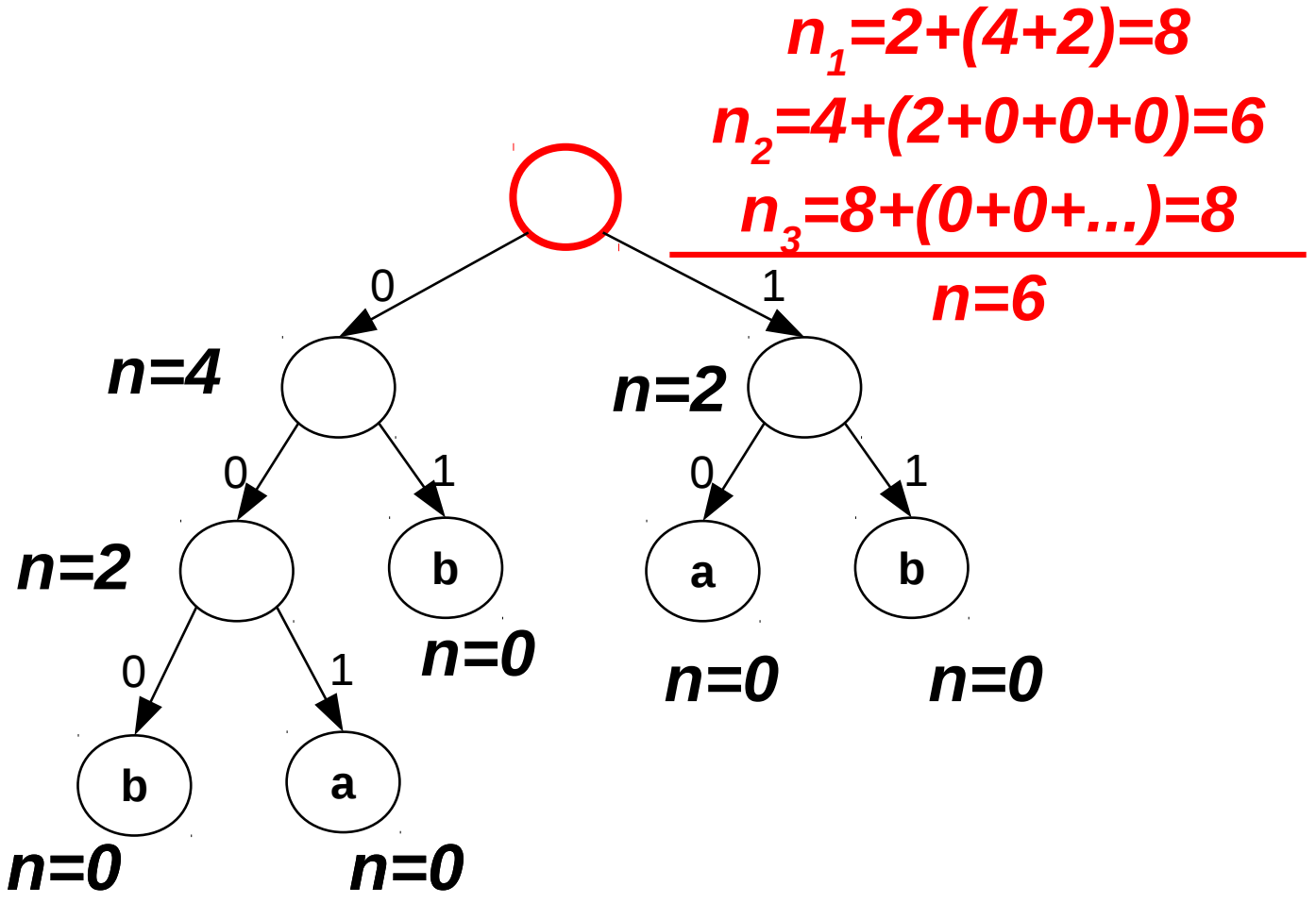
Optimális szinttömörítés: példa

2)Minden F részfára határozzuk meg az $n_k(F)$ és $n(F)$ értékeket postorder sorrendben



Optimális szinttömörítés: példa

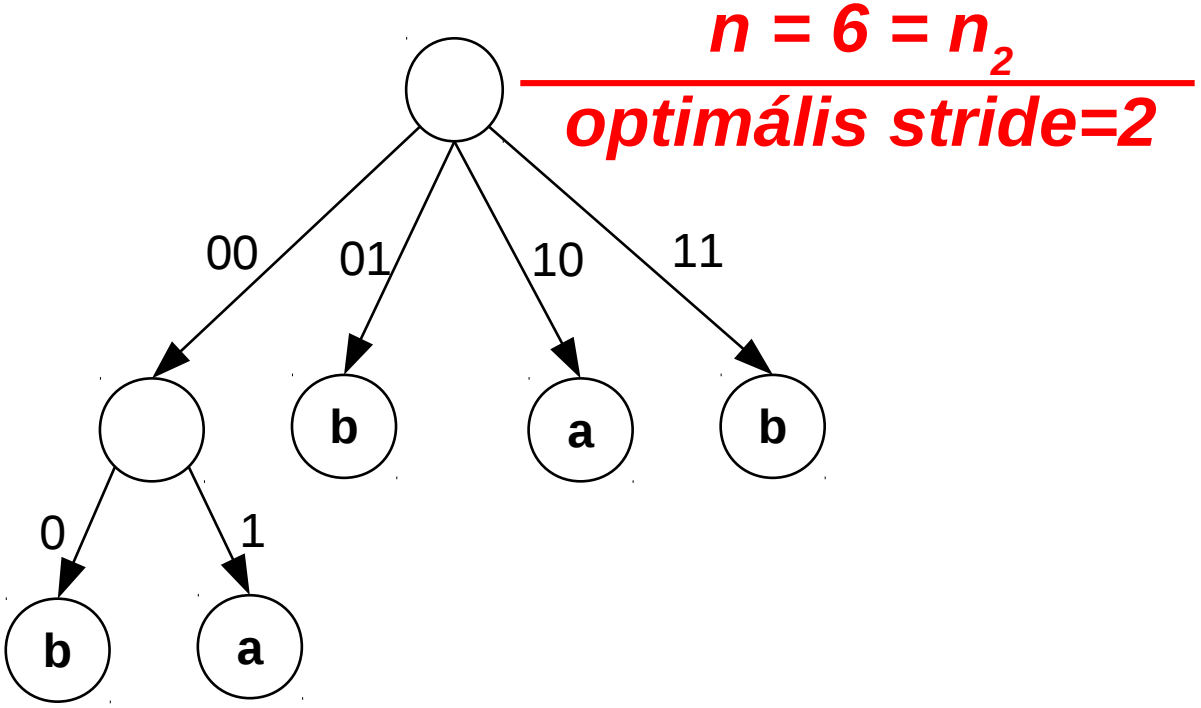
2)Minden F részfára határozzuk meg az $n_k(F)$ és $n(F)$ értékeket postorder sorrendben



Optimális szinttömörítés: példa

3)Az optimális megoldás *n(F)=6* birtokában előállítjuk az optimális szinttömörített prefix fát

- egy preorder bejárással megoldható, ha a pontokban tároljuk az optimális *stride*-méretet



Optimális szinttömörítés

- A szükséges preorder/postorder bejárásokat most nem részletezzük (gyakorlat)
- A szinttömörítés csökkenti a fa méretét és a szintjeinek számát (vagyis az LPM keresés idejét)
- A gyakorlatban elterjedten használt:
  - a Linux kernel `fib_trie` adatstruktúrája egy szint- (és útvonal)tömörített prefix fa
  - network processzorok mindegyike támogatja
  - Intel DPDK
- Kombinálható az ORTC-vel (PhD téma, valaki?)